Soluție

1.a) $d = \frac{bc}{a} \Rightarrow f(x) = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c}$

b) Fie $x_1, x_2 > 0$ a.î. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1(ad - bc) = x_2(ad - bc)$, deci $x_1 = x_2$, adică f este injectivă.

c) Inducție după n. Pentru $n = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}$. Presupunem adevărată pentru n și demonstrăm pentru $n+1$. $\underbrace{(f \circ f \circ ... \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori}}(x) = \frac{a_n f(x) + b_n}{c_n f(x) + d_n} = \frac{a_{n+1}x + b_{n+1}}{c_{n+1}x + d_{n+1}}$, deoarece $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \cdot A$.

2a) Fie $X \in G, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det X = a + 1 \neq 0$.

b) $A^2 = A, B^2 = 0_2, A \cdot B = B, B \cdot A = 0_2$. Fie $X_1, X_2 \in G;\ X_1 = I_2 + aA + bB,\ X_2 = I_2 + a'A + b'B$.

$X_1 \cdot X_2 = I_2 + (a + a' + aa')A + (b + b' + bb')B$, $a + a' + aa' \neq -1$. $(X_1)^{-1} = I_2 - \frac{a}{a+1}A - \frac{b}{a+1}B$, deci G este un grup.

c) $X^2 = I_2 \Rightarrow X = I_2 - 2A + bB, b \in \mathbb{R}$.